संख्या पद्धति फार्मूला

गणितीय संख्या पद्धति या प्रणाली संख्याओं का एक समूह है जिसका उपयोग मात्रा या मूल्यों को दर्शाने के लिए किया जाता है। गणित में जितनी भी संख्याए है, उन संख्याओ में बहुत ही एक जैसी है तो कुछ अलग है .इन्ही अलग और एक जैसी तक यह संख्याओं को उनके गुणों और विशेषताओं के आधार पर व्यवस्थित और वर्गीकृत करने का एक तरीका संख्या पद्धति कहलाता है.

संख्या के प्रकार :

प्राकृतिक संख्या) Natural Number)

जिन संख्याओं का उपयोग हम चीजों को गिनने के लिए करते हैं उन्हें प्राकृतिक संख्या (Natural Number) कहते हैं . प्राकृतिक संख्याएँ 1 से शुरू होती हैं | जैसे : 1, 2, 3, 4 ,...........

प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को N = {1,2,3,.....∞} के रूप में निरूपित किया जाता है. प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याओं का एक उपसमुच्चय होती हैं, जिसमें पूर्ण संख्याएँ प्राकृतिक संख्याएँ और शून्य होती हैं

पूर्ण संख्याएं) Whole Number)

प्राकृतिक संख्याओं में "0" (शून्य) को मिला देने पर जो संख्याएँ बनती हैं , वे पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। पूर्ण संख्याओं का समुच्चय W = {0, 1, 2, 3 ……….} है।

पूर्ण संख्याओं में कोई भिन्न या दशमलव नहीं होता है.

पूर्णांक संख्या) Integer Number)

जब हमें कोई भी चीज 0 से नीचे नापनी होती है तो हम ऋणात्मक चिह्न वाली प्राकृतिक संख्याओं का उपयोग करते हैं | जैसे : (i) यदि तापमान 0 से 2 डिग्री नीचे हो तो हम गणितीय भाषा में $-2^\circ C$ लिखते हैं |

(i i) यदि हमें समुद्र तल से २००० मीटर नीचे नापना हो तो हम -2000 लिखेंगे|

पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है ,Z = {…….–3, -2, -1, 0, 1, 2, 3……….}

सम संख्या) Even Number)

ऐसी प्राकृतिक संख्याएँ जो 2 से भाग करने पर पूरी तरह से विभाजित हो जाती हैं सम संख्या कहलाती हैं। ऐसे संख्याओं के इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 और 8 होता है | जैसे :- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20…………. आदि सम संख्याएं हैं |

विषम संख्या) Odd Number)

ऐसी प्राकृतिक संख्याएँ जो 2 से भाग करने पर पूरी तरह विभाजित नहीं होती विषम संख्या कहलाती हैं।जैसे:- 1, 3, 5, 7, 9, 11, ………… आदि विषम संख्याएं हैं |

अभाज्य संख्या) Prime Number)

वह संख्या जो केवल एक और स्वयं से बिभाजित हो और किसी भी अन्य संख्या से विभाजित न हो उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं। जैसे:- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ……… आदि संख्याएँ केवल एक और स्वयं से बिभाजित होती हैं|

नोट :- '1' न तो भाज्य संख्या है न ही अभाज्य संख्या.

भाज्य संख्या) Composite Number)

ऐसी प्राकृतिक संख्या जो स्वंय और 1 से विभाजित होने के अलावा कम से कम किसी एक और संख्या से विभाजित हो उन्हें भाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे:- 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20…….

युग्म अभाज्य संख्याएँ) Twin prime numbers)

दो अभाज्य संख्याओं के समूह को यदि उनका अंतर 2 है, **युग्म अभाज्य** संख्याएँ कहा जाता है । उदाहरण - (3, 5), (11, 13) आदि।

सह-अभाज्य संख्याएँ)Co-prime number)

संख्याओं का वह समुच्चय जिसमें 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं होता है उन्हें सह-अभाज्य संख्याएँ संख्या कहते हैं। । उदाहरण-(5, 6), (19, 21), (13, 17) आदि।

परिमेय संख्या) Rational Number)

ऐसी सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सकता हैं, (जहाँ पर p और q पूर्णांक संख्याएँ हैं और q का मान शून्य न हो) उन्हें परिमेय संख्या कहते हैं | उदाहरण - 2/5, 9/6, 13/17 आदि।

परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के केवल 2 विकल्प होते हैं या तो वे सांत(terminating) दशमलव (जैसे :- $\frac{1}{2} = 0.5, \frac{4}{5} = 0.8$ आदि) याअनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring) जैसे:- $\frac{1}{3} = 0.333333........$

अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring) दशमलव जैसे:- $\frac{1}{3} = 0.333333........$ में जिन संख्याओं की पुनरावृति होती है उन्हें हम $\frac{1}{3} = 0.333333........ = 0.\overline{3}$ इस तरह से लिखते हैं|

अपरिमेय संख्या) Irrational Number)

वे संख्याएँ जो असांत, अनावर्ती होती हैं अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। उदाहरण:√2, √3, √7 आदि। सबसे लोकप्रिय अपरिमेय संख्या π = 3.1459265.. और e = 2.7182818…… हैं|

वास्तविक संख्या (Real Numbers)

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के समूह को "वास्तविक संख्याएँ" कहते हैं।

संख्या पद्धति के महत्वपूर्ण सूत्र (Number System Formula in Hindi)

(i) n प्राकृत संख्याओं के योग अर्थात 1+2+3+4+5+6+..........+n = $\frac{n(n+1)}{2}$

उदाहरण : प्रथम 20 प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

1+2+3+4+5+6+..........+20 = $\frac{20(20+1)}{2} = \frac{20 \times 21}{2} =$ 210

(ii) n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग फल अर्थात

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

उदाहरण : प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए।

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10^2 = \frac{10(10+1)(2 \times 10+1)}{6} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

(iii) n प्राकृत संख्याओं के घनो का योगफल अर्थात

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

उदाहरण : प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के घनों का योग ज्ञात कीजिए।

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots . +10^3 = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{10 \times 11}{2}\right\}^2 = 55^2 = 3025$$

(iv) प्रथम n सम प्राकृतिक संख्याओं का योग = 2+4+6+8+....n पद तक = n(n+1)

उदाहरण : प्रथम 10 सम प्राकृतिक संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 = 10(10+1)= 10 x 11 = 110

(v) प्रथम n विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग = n^2

उदाहरण : 1 से 20 तक की सभी विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए |

1 से 20 तक की सभी विषम संख्याएँ = 1,3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

1 से 20 तक , 10 विषम संख्याएँ हैं | उनका योग

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19= $10^2 = 100$

(vi) n प्राकृत सम संख्याओं के वर्गों का योग फल =
$2^2 + 4^2 + 6^2 + ...n\ terms = \frac{(n+1)(2n+1)2n}{3}$

उदाहरण : प्रथम 5 सम प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए।

प्रथम 5 सम प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = \left\{\frac{(5+1)(2\times 5+1)(2\times 5)}{3}\right\} = \frac{6\times 11\times 10}{3} = 220$$

(vii) n प्राकृत सम संख्याओं के घनों का योगफल =
$2^3 + 4^3 + 6^3 + ...n\ terms = 2n^2(n+1)^2$

(viii) n प्राकृत बिषम संख्याओं के वर्गों का योग फल =
$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

(ix) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना :

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने लिए हम 'गैप विधि' का उपयोग करेंगे |

इस विधि में निम्न चरणों का प्रयोग करें:-

(अ) दी गई परिमेय संख्याओं a और b के बीच का अंतर ज्ञात कीजिए | गैप = a-b

(ब) अंतर को n+1 से विभाजित करें।

(स) अब $\frac{b-a}{n+1}$ को 1,2,3,4, ...,n से गुणा करें और a में जोड़ दे|

इस प्रकार दी गई परिमेय संख्याओं a और b के बीच की n परिमेय संख्याएँ होंगी: -

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1}\ a+3\frac{b-a}{n+1},\ \ldots\ldots\ldots,a+n\frac{b-a}{n+1}$$

(x) योगात्मक तत्समक (Additive identity): a + 0 = a अतः शून्य को योगात्मक तत्समक कहते हैं|

(xi) योगात्मक प्रतिलोम (Additive inverse) : यदि a + 0 = a . अतः a और (-a) एक – दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं |

(xii) गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity):- a x 1 = a अतः 1 को गुणात्मक तत्समक कहते हैं|

(xiv) गुणात्मक प्रतिलोम (Multiplicative Inverse):- यदि a x b = 1 अतः तब a और b एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम हैं|

(xv) परिमेय संख्या) Rational Number)

ऐसी सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सकता हैं, (जहाँ पर p और q पूर्णांक संख्याएँ हैं और q का मान शून्य न हो) उन्हें परिमेय संख्या कहते हैं | उदाहरण - 2/5, 9/6, 13/17 आदि।

परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के केवल 2 विकल्प होते हैं या तो वे सांत(terminating) दशमलव (जैसे :- $\frac{1}{2}=0.5,\frac{4}{5}=0.8$ आदि) या असांत आवर्ती (non-terminating recurring) जैसे:- $\frac{1}{3}=0.333333\ldots\ldots..$

असांत आवर्ती (non-terminating recurring) दशमलव जैसे:- $\frac{1}{3}=0.333333\ldots\ldots..$ में जिन संख्याओं की पुनरावृति होती है उन्हें हम $\frac{1}{3}=0.333333\ldots\ldots..=0.\bar{3}$ इस तरह से लिखते हैं|

यदि असांत आवर्ती दशमलव संख्याएँ $0.x\bar{y}$ या $0.x\overline{yz}$ के रूप में हो तो उन्हें परिमेय संख्या p/q के रूप में निम्नवत बदलते हैं |

$$0.x\bar{y}=\frac{xy-x}{90}$$

$$0.x\overline{yz}=\frac{xyz-x}{990}$$

विभाज्यता नियम: (Test of Divisibility)

2 से विभाज्यता

कोई भी संख्या 2 से पूर्णतया विभाजित होगी, जब उसका इकाई का अंक 0, 2, 4 ,6 या 8 हो। जैसे - 122, 240, 146 आदि सभी संख्याएँ 2 से विभाजित हैं।

3 से विभाज्यता

यदि संख्या के अंकों का योग 3 का गुणक है, तो संख्या 3 से विभाज्य है।

उदाहरण: (i) 2997 ; 2+9+9+7=27, जो 3 से विभाज्य है, इसलिए 2997 भी3 से विभाज्य है |

4 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंक 4 से विभाज्य हैं, तो वह संख्या 4 से विभाज्य होगी।

उदाहरण: संख्या 2512 को अंतिम दो अंक यानी 12, 4 से विभाज्य है, इसलिए मूल संख्या 2512 भी 4 से विभाज्य होगी |

5 से विभाज्यता

अंत में 0 या 5 वाली संख्याएँ 5 से विभाज्य होती हैं। उदाहरण: 250, 1555, 335 आदि |

6 से विभाज्यता

जब कोई संख्या 3 और 2 दोनों से विभाज्य होती है, तो वह विशेष संख्या 6 से भी विभाज्य होती है |

7 से विभाज्यता

एक संख्या 7 से विभाज्य होती है जब इकाई के अंक के दोगुने और अन्य अंकों से बनने वाली संख्या के बीच का अंतर या तो शून्य या 7 का गुणक होता है |

उदाहरण : 672 (2 का दोगुना 4, 67-4=63, और 63÷7=9), यानी 672 , 7 से विभाज्य है।

8 से विभाज्यता

जब किसी संख्या के अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 8 से विभाज्य होती है |

उदाहरण: संख्या 62584 के अंतिम तीन अंक यानी 584 मानें। चूंकि 584 , 8 से विभाज्य है, इसलिए मूल संख्या 62584 भी 8 से विभाज्य है।

9 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है, तो वह संख्या स्वयं 9 से विभाज्य होगी।

उदाहरण: 30555 , 3+0+5+5+5=18 जो 9 से विभाज्य है, इसलिए 30555 भी 9 से विभाज्य है |

10 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या में इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाज्य होती है।

11 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के वैकल्पिक अंकों के योग का अंतर 11 से विभाज्य है तो वह संख्या भी 1 1 से विभाज्य है |

उदाहरण: 217382 विषम संख्या वाले स्थान पर उपस्थित अंको का योग =2+7+8 = 17

सम संख्या वाले स्थान पर उपस्थित अंको का योग = 1+3+2 =6

दोनों सख्या का अंतर = 17 -6 =11

स्पष्ट रूप से, 217382 11 से विभाज्य है |

संख्या पद्धति से संबधित कुछ महत्वपूर्ण ट्रिक :

- चार क्रमागत संख्याओं का गुणनफल हमेशा 4 से बिभाज्य होता है |
  जैसे :101 x102 x103 x104 का गुणनफल | से बिभाज्य है 4
- ऐसी संख्या जो एक अंक कोबार 3 दोहराने से बनती है 37 और 3 वह संख्या , से विभाज्य होती है |
  222 ,111 जैसे, , 333……… आदि|

- ऐसी संख्या जो एक अंक को 6 बार दोहराने से बनती है , वह संख्या 3, 7, 11,13 और 37 से विभाज्य होती है| जैसे 111111, 222222, 333333 ,……… आदि|

- जब किसी संख्या का 6 बार, 12 बार, 18 बार …… लगातार पुनरावृति हुआ, तो वह संख्या 7 से पूर्णतः विभाज्य होगी।
- यदि किसी संख्या की पुनरावृति सम में हुई हो, तो वह संख्या 11 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 5555
- यदि कोई संख्या 3 और 4 से विभाज्य है, तो वह 12 से पूर्णतः विभाज्य होगी।
- यदि किसी संख्या के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 25 से विभाज्य है या अन्तिम दोनों अंक शून्य हैं, तो वह संख्या 25 से पूर्णतः विभाज्य होगी।

- **यदि 2 से किसी भी उचित भिन्न को घटाया जाता है तो उसका मान हमेशा $\left(\frac{\text{हर}+2}{2}\right)$ होता है |**

$$\mathbf{2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}}$$

- $$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = a$$

$$\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = 7$$

- $$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{n times}}}}}} = a^{\frac{2^n-1}{2^n}}$$

- $$\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}} = 7^{\frac{2^6-1}{2^6}} = 7^{\frac{64-1}{64}} = 7^{\frac{63}{64}}$$

- $$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

$$\sqrt{11+\sqrt{11+\sqrt{11+\sqrt{11+\sqrt{11+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = \frac{1+\sqrt{4\times 11+1}}{2} = \frac{1+\sqrt{45}}{2}$$

- $$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = \frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

$$\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5-\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}}} = \frac{-1+\sqrt{4\times 5+1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

- $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

उदाहरण : $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)$

हलः $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$

यहाँ n= 5

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right) = \frac{n+1}{2n} = \frac{5+1}{10} = \frac{6}{10}$$

- $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots . + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$

  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots . + 9^2 - 10^2 = -\frac{10(10+1)}{2} = -55$

  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots + 99^2 - 100^2 = -\frac{100(100+1)}{2} = -5050$

- $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots\dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{n^2-1}{n}$

  $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots\dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}} = \frac{100^2-1}{100}$

  $= \frac{9999}{100}$